第3回　定常性と主な時系列モデル

AR(p),MA(q),ARMA(p,q)

1 目次

Contents

2 Notation

前回との違い

前回は、標本自己共分散・標本自己相関などを求めた。

これらは記述統計といい、標本データの様子を記述するもの。

$\hat{\gamma}$,　$\hat{\rho}$ のハットは、真の値を推定するという意味。

今回は真のモデルがあるとして、そのモデルについての解説をする。したがってハットはつかない。

3 定常性の定義

確率変数 $\{Y_t\}_{t=1}^{n}$ について

$\{Y_t\}$ が定常である

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} E[Y_t] = \mu & \text{期待値一定} \\ V[Y_t] = E[(Y_t-\mu)^2] = \sigma_y^2 & \text{分散一定} \\ E[(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu)] = \gamma_j & \text{自己共分散は j のみに依存} \end{cases}$$

4 定常なモデル 1

1) 最も簡単なものは以下の 3 つ (今回はこれがメイン)

AR(1) 過程　$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

MA(1) 過程　$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

ARMA(1,1) 過程　$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

ただし $|\phi| < 1, \quad |\theta| < 1$

$$E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = \begin{cases} 0 & (if \quad t \neq s) \\ \sigma^2 & (if \quad t = s) \end{cases}$$

(誤差項 ε_t は、期待値 0 で各期無相関。分散は σ^2 で一定。)

5 定常なモデル 2

2) 前ページのものを一般的にすると、

AR(p) $$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

MA(q) $$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ARMA(p,q) $$\begin{aligned} Y_t &= c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} \\ &\quad + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

(ε_t は前ページと同様)

パラメータ $\phi_1, \ldots, \phi_p$ や $\theta_1, \ldots, \theta_q$ の条件は複雑なので省略

また誤差項に正規分布を仮定することも多い。

$(\varepsilon \sim i.i.d. N(0, \sigma^2), \quad \varepsilon \sim NID(0, \sigma^2), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}))$

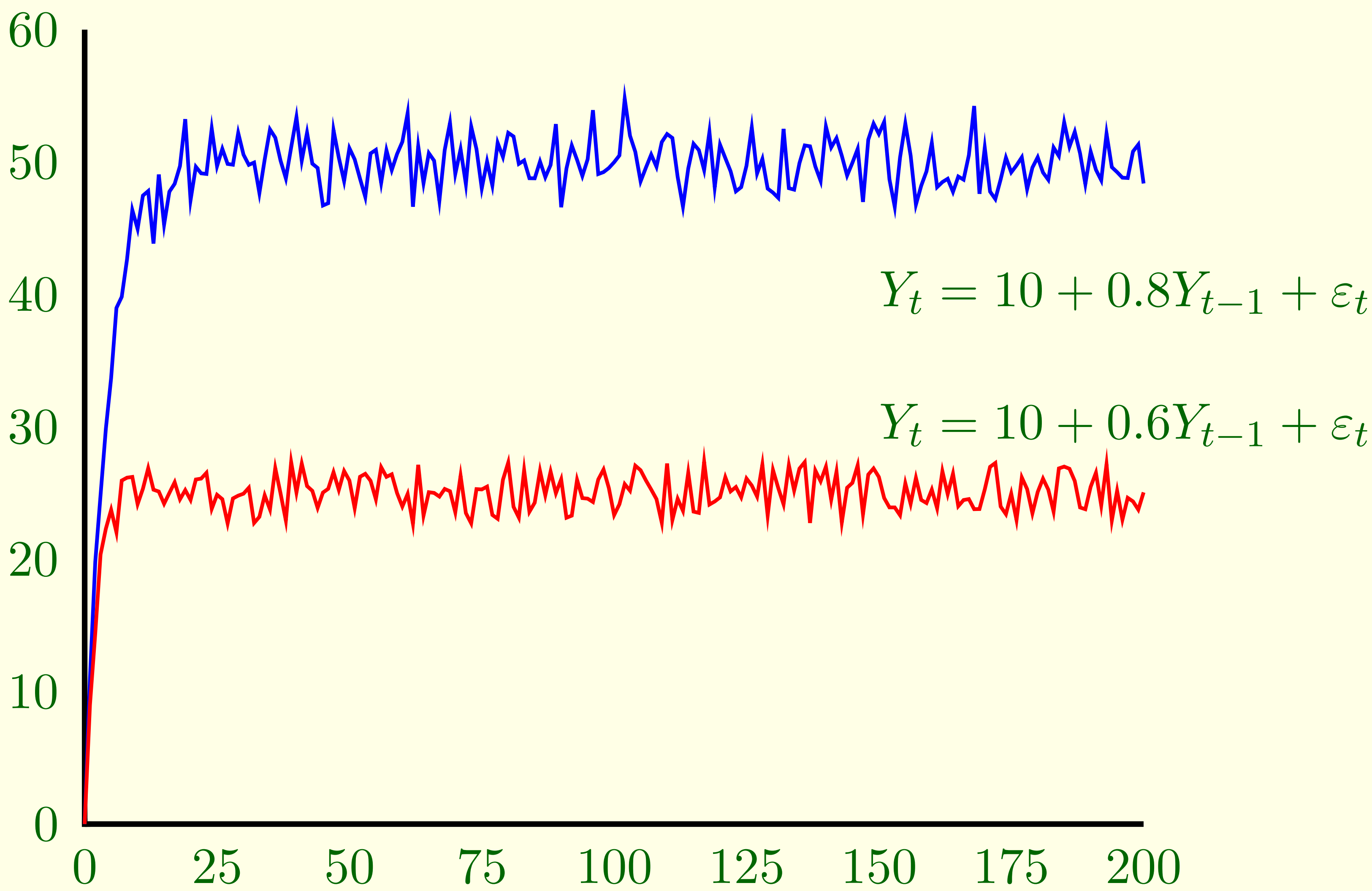
6 AR(1) のグラフ 1

$Y_0 = 0$ とする。誤差項 ε_t を、公正なコイン投げと考えて、
表が出たら 1 裏が出たら-1 とする。
$E[\varepsilon_t] = (1/2)1 + (1/2)(-1) = 0 \quad (\forall t = 1, 2, \cdots)$
よって、平均が 0 なので分散は
$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = (1/2)1^2 + (1/2)(-1)^2 = 1 \quad (\forall t = 1, 2, \cdots)$
で誤差項の条件をみたす。

$Y_t = 10 + 0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t$
$Y_t = 10 + 0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t$

のグラフを書いてみた例が次ページ

7 AR(1) のグラフ 2



青線の書き方は次ページ

8 AR(1) のグラフ 3

A1 セルに 0。A2 セルに、

```
=10+0.8*A1+if(rand()>0.5,1,-1)
```

A3:A200 まで A2 をコピーして図示すると青線のように 50 近辺で揺れる。

また、$\phi = 1$ の場合つまり、$Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ とすると、前ページのようなグラフにならず、(乱数次第で) あっちこっちにさまよう。(random walk・酔歩過程)

9 AR(1) の性質

モデル $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2), |\phi| < 1)$

- $\mu = E[Y_t] = c/(1-\phi)$
- $\gamma_0 = V[Y_t] = \sigma^2/(1-\phi^2)$
- $\gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = \sigma^2[\phi^j/(1-\phi^2)]$

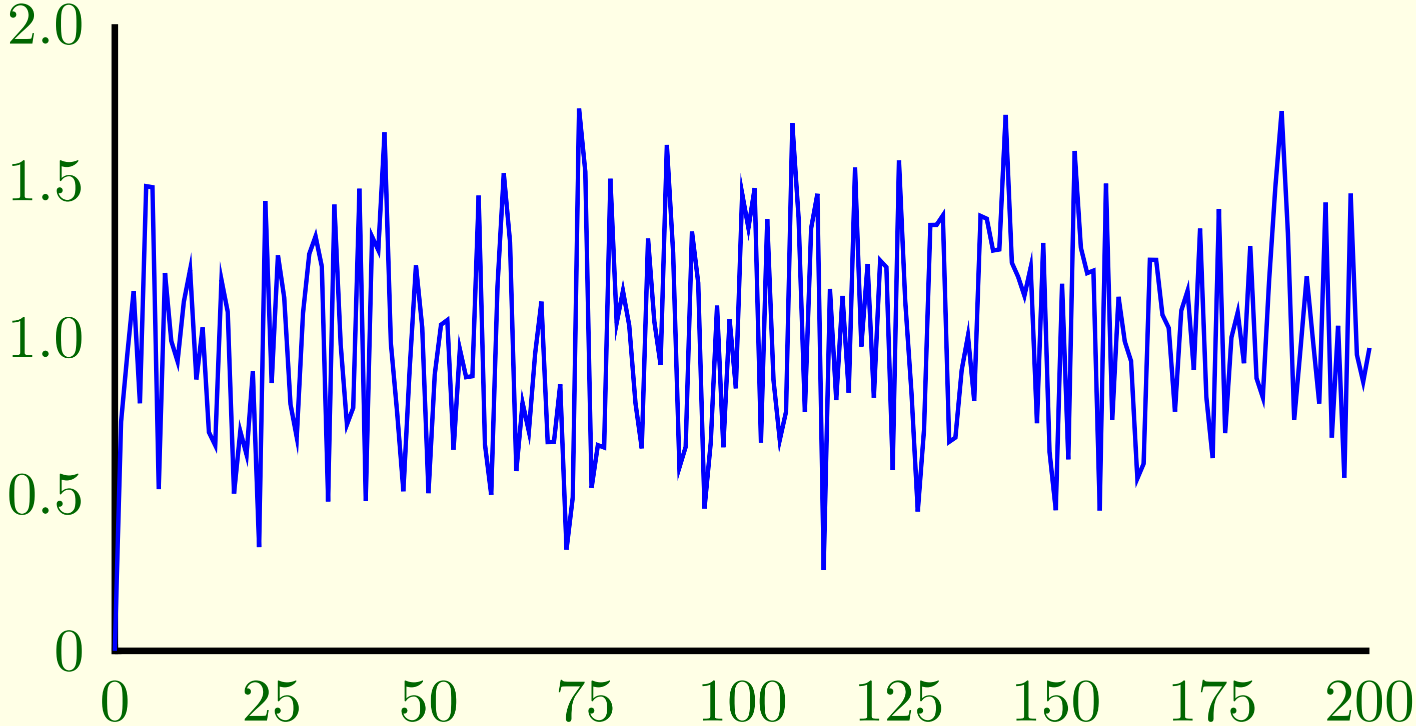
(証明は Hamilton P53)

平均に関しては、グラフ (7) で、
青線が 50 近辺で揺れた理由は、10/(1-0.8)=50
赤線が 20 近辺で揺れた理由は、10/(1-0.6)=25

自己共分散は、j が増えるごと徐々に 0 に近づく。

10 MA(1) のグラフ 1

MA(1)$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ より、$Y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1}$ のグラフ



は以下のように作る。誤差項 ε_t は-0.5 以上から 0.5 未満の一様乱数に従うとする。

11 MA(1) のグラフ 2

・見出しを書く。

B1 セルに 1、B2 セルに 0.6。A5 セルに t、C5 セルに乱数、

・A6:A206 まで、0 から順に 200 まで入力

・C6 セルに、=rand()-0.5　と入力し C206 セルまでコピー

・B6 セルに 0。

・B7 セルに、=$B$1+C7+$B$2*C6　と入力し B206 セルまでコピー

・B6:B206 をグラフ化する。

12 MA(1) の性質

MA(1) モデル　$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \quad (|\theta| < 1)$

- $\mu = E[Y_t]$
- $\gamma_0 = V[Y_t] = (1 + \theta^2)\sigma^2$
- $\gamma_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = -\theta\sigma^2$
- $\gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = 0 \quad (if \quad j > 1)$

自己共分散が時間差 2 以上の場合は必ず 0 になっている。

13 経済データの性質と ARMA(p,q)

純粋 MA 過程というものはほとんどない。
AR については、AR(1) でなく次数が多くなることがある。

では ARMA(p,q) というものはどのような意味があるか?

13 経済データの性質と ARMA(p,q)

純粋 MA 過程というものはほとんどない。
AR については、AR(1) でなく次数が多くなることがある。

では ARMA(p,q) というものはどのような意味があるか?

それは、純粋 AR 過程や純粋 MA 過程で表される時系列モデルを、少ない次数で表しえるところに意味がある。(節約の原理)

例えば、あるデータが AR(20) で推定できるところを、同じような当てはまり具合で、ARMA(1,1) で表されたら、後者の方がより望ましいであろう。

End

Push Esc Key

(C)KADODA Tamotsu (角田　保)
@ Daito Bunka Univ. (大東文化大学)
Last Modified: May 12, 2003