最尤法の考え方

コイン投げの結果から、表が出る確率を推定する

1 目次

Contents

2 考え方 (1)

あるコインを 100 回投げたとき、65 回表が出た。

このコインの真の表が出る確率 (p とする) としては、どのような値がふさわしいだろう?

例えば

2 考え方 (1)

あるコインを 100 回投げたとき、65 回表が出た。

このコインの真の表が出る確率 (p とする) としては、どのような値がふさわしいだろう?

例えば

$p=0.4$、0.65、0.9 の中では、どれがふさわしい?

2 考え方 (1)

あるコインを 100 回投げたとき、65 回表が出た。

このコインの真の表が出る確率 (p とする) としては、どのような値がふさわしいだろう?

例えば

p=0.4、0.65、0.9 の中では、どれがふさわしい?

多分 0.65 と答える人が多い。なぜ???

3 考え方 (2)

- 「観測された出来事を尊重する。」ということは大事

3 考え方 (2)

- 「観測された出来事を尊重する。」ということは大事
- この出来事が (理論的に) 一番起こりやすいような値を、観測されたデータから推定する

3 考え方 (2)

- 「観測された出来事を尊重する。」ということは大事
- この出来事が (理論的に) 一番起こりやすいような値を、観測されたデータから推定する
- これが最尤法

4 コイン投げと尤度関数(1)

- 真の値を所与として、ある出来事が起こる確率を表わしたものを、尤度関数という。一般に L で表わす。

- コインの投げ方が、それぞれ独立ならば、二項分布より

$${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

- 今の場合、n=100 と k=65。これを p の関数として $L(p)$ とあらわす。

5 コイン投げと尤度関数 (2)

- ただし、n が大きくなると急激に小さい値になるので、対数をとることが一般的

- これを対数尤度関数といい、$\ln L(p)$ や、その他に $\mathscr{L}(p)$ (筆記体の L) を用いることが多い

- 今の場合

$$\ln({}_nC_k) + k\ln(p) + (n-k)\ln(1-p)$$

これを最大化する。

6 最大化

今の場合は微分で簡単に計算できる。

(一般にはコンピュータで数値計算によって求める)

$$\mathscr{L}(p) = \ln({}_nC_k) + k\ln(p) + (n-k)\ln(1-p)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}(p)}{\partial p} &= \frac{k}{p} + (n-k)\frac{-1}{1-p} = \frac{k(1-p)-(n-k)p}{p(1-p)} \\ &= \frac{k-np}{p(1-p)}\end{aligned}$$

増減表を書くと

p	0	$\cdots$	k/n	$\cdots$	1
$\partial \mathscr{L}(p)/\partial p$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{L}(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

p=k/n のとき最大

End

Push Esc Key