

連立方程式と行列の積

$a \neq 0$ のとき、 $ax = b \iff x = a^{-1}b$ の応用

1 目次

Contents

1	目次	2
2	方程式と1次連立方程式	4
3	行列演算-scilab	6
4	行列	7
5	行列の積	8
6	単位行列	11

7	逆行列	13
8	結論	14
9	追記・行列の和	15

2 方程式と1次連立方程式

定数 a, b で未知数 x についての方程式

$$ax = b \quad (1)$$

の解は、 $a \neq 0$ のとき、 $x = b/a = a^{-1}b$

これと同様に、定数 p, q, r, s, t, u で未知数 y, z についての方程式

$$\begin{aligned} py + qz &= t \\ ry + sz &= u \end{aligned} \quad (2)$$

が解けないだろうか？。つまり

2.1 方程式と1次連立方程式 (2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (3)$$

として、(2)式 $\begin{cases} py + qz = t \\ ry + sz = u \end{cases}$ を

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ と表現し、連立方程式の解 \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (4)$$

で表わせないか？

3 行列演算-scilab

結論から言えば可能。 $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ 3y + 4z = 6 \end{cases}$ を Scilab で解く。

```
A=[1 2;3 4]
```

```
b=[5;6]
```

```
inv(A)*b
```

の結果

```
! - 4. !
```

```
! 4.5 !
```

と表記されるので、 $y = -4, z = 4.5$ であることが分かる。

4 行列

まず行列という概念とその計算法を説明する。

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

については、 A, B, C はそれぞれ、
1行2列、2行1列、2行2列の行列という。

- 1行の行列を行ベクトル、1列の行列を列ベクトルという。
- 中の数字を成分という。(要素ともいう。)
- 1行1列の数(つまり今までわれわれが使っていたもの)をスカラーという。

5 行列の積

同じ長さの行ベクトルと列ベクトルの積 (行ベクトルが左・列ベクトルが右の場合) はスカラーとなる。

計算は、下記のようにそれぞれの成分の積の和をとる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 42$$

5.1 行列の積 2

2つの行列 A, B の積 AB の計算は、
左側の行列 A を行ベクトルの集まり、
右側の行列 B を列ベクトルの集まり、と考えると計算
(左側の行列の列数=右側の行列の行数のときのみ計算可能。)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1a + 2c + 3e & 1b + 2d + 3f \\ 4a + 5c + 6e & 4b + 5d + 6f \end{pmatrix}$$

正式な計算法は次ページ

5.2 積の計算の注意

- 交換法則 $AB = BA$ は、一般には成り立たない
- A が p 行 m 列の行列、 B が m 行 n 列の行列なら AB は、 p 行 n 列の行列となる
- 行列 A の i 行 j 列の数字を A の (i,j) 成分といい a_{ij} と書くので、 A, B が上の形するとき $AB = C$ ならば、 $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$ となる。

6 単位行列

- 行列の斜め部分 (つまり a_{ii}) を、対角成分という。
- 行数・列数が同じ行列を正方行列という。n 行 n 列の場合、n 次の正方行列という。
- 全ての対角成分が 1 で、非対角成分が 0 の行列を単位行列といい、 E などで表わす。一般形と 2 次の形は以下

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.1 単位行列の性質

- これは数字で言うと 1 に当たるもの。
- n 行 m 列の行列 A に、左から n 次の単位行列を掛けても変わらない ($EA = A$)
- n 行 m 列の行列 B に、右から m 次の単位行列を掛けても変わらない ($BE = B$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

7 逆行列

ある正方行列 A について、

$$AB = BA = E$$

となる行列 B を A の逆行列といい A^{-1} で表わす。

- A の値によっては、逆行列 A^{-1} が存在しないものもある。
- 逆行列は英語で inverse といい、Scilab の場合=`inv(A)`、エクセルの場合=`minverse(セル範囲)` という関数が用意されている。

8 結論

行列の積 (5)・単位行列 (6)・逆行列 (7) の知識から、「方程式と1次連立方程式 (2)(2.1)」の式変形が以下となることが分かる。

$$Ax = b$$

左から A^{-1} を掛けて $A^{-1}Ax = A^{-1}b$

$A^{-1}A$ は単位行列 $Ex = A^{-1}b$

単位行列の性質より $x = A^{-1}b$

9 追記・行列の和

行列の和は成分同士を加えればよい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

行数・列数とも同じでなければ、和の計算はできない。

End
Push Esc Key

(C)KADODA Tamotsu (角田 保)
@ Daito Bunka Univ. (大東文化大学)
Last Modified: May 6, 2003